

# Simulation numérique d'un gaz compressible par une méthode de Galerkin Discontinue

Rémy Gresle  
Master Ondes, Atomes, Matière  
Encadré par : Holger Homann  
Laboratoire Lagrange



La méthode de Galerkin Discontinue (GD) nodale est une classe de méthode numérique de résolution des équations aux dérivées partielles qui présente les avantages d'être conservative, de converger plus rapidement proportionnellement à son ordre et d'être adaptée à l'architecture des supercalculateurs modernes. Dans le cas présent, nous nous intéressons à la résolution de l'équation de Navier-Stokes compressible à une dimension à l'aide de cette méthode, le code est rédigé en C++.

## NAVIER STOKES COMPRESSIBLE

### 1D

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0$$

$$\partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + a^2 \rho) = \nu \partial_x^2 u$$

$u$  vitesse des particules       $a$  vitesse du son  
 $\rho$  densité de particules       $\nu$  viscosité du fluide

Les équations sont formulées sous forme d'une loi de conservation :

$$(1) \quad \partial_t \vec{U} + \partial_x f(\vec{U}) = 0 \quad (\vec{U}) = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \end{pmatrix}$$

## Pourquoi Galerkin Discontinue ?

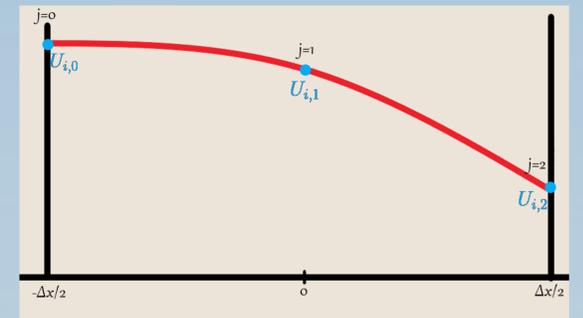
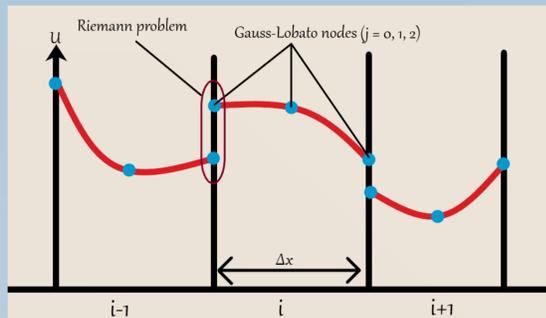
- Adapté pour des lois de conservation
- Ordre de calcul naturellement élevé  
+ l'ordre est élevé, + le calcul est rapide
- Méthode locale ne dépendant que des cellules adjacentes, calcul performant sur les supercalculateurs (peu de communication entre les unités de calcul)

## Méthodes concurrentes

Différences finies	Volumes finis
- N'est pas naturellement conservatif pour toutes les équations.	- Besoin de reconstruire U à partir de la valeur moyenne dans chaque cellule
- Complexe à écrire à hauts ordres (de plus en plus non-local)	→ S'appuie sur plusieurs cellules voisines pour reconstruire U

## GALERKINE DISCONTINUE

La méthode GD repose sur la discrétisation de U dans des cellules de taille  $\Delta x$  sous forme de polynômes d'ordre n (dans le cadre des travaux présentés, l'ordre est fixé à 3).



$$(2) \quad U_i(x) = \sum_{j=0}^{N-1} U_{i,j} h_j^N(x) \quad h_j^N = \prod_{\substack{0 \leq m \leq N \\ m \neq j}} \frac{X - X_m}{X_j - X_m} \quad \text{Polynôme de Lagrange d'ordre N}$$

Chaque polynôme est indépendant et le problème de discontinuité aux frontières des cellules (appelé problème de Riemann) doit être résolu. La formulation faible de l'évolution temporelle de la loi de conservation (1) donne :

$$(3) \quad \frac{dU_{i,j}}{dt} = \frac{2}{w_j \Delta x} \cdot \left( \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} f(U) \partial_x h_j^N dx + [f(U) h_j^N]_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \right)$$

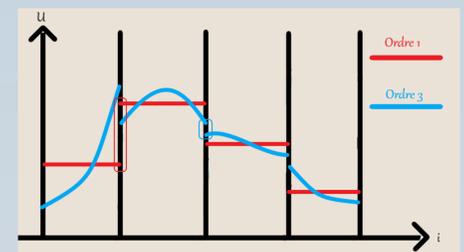
$$= \frac{2}{w_j \Delta x} \cdot \left( \sum_{i=0}^{N-1} f(U(x_i)) \cdot \partial_x h_j^N(x_i) \cdot w_i \right) + \text{FLUX NUMERIQUE (Riemann)}$$

Gauss-Lobatto Quadrature

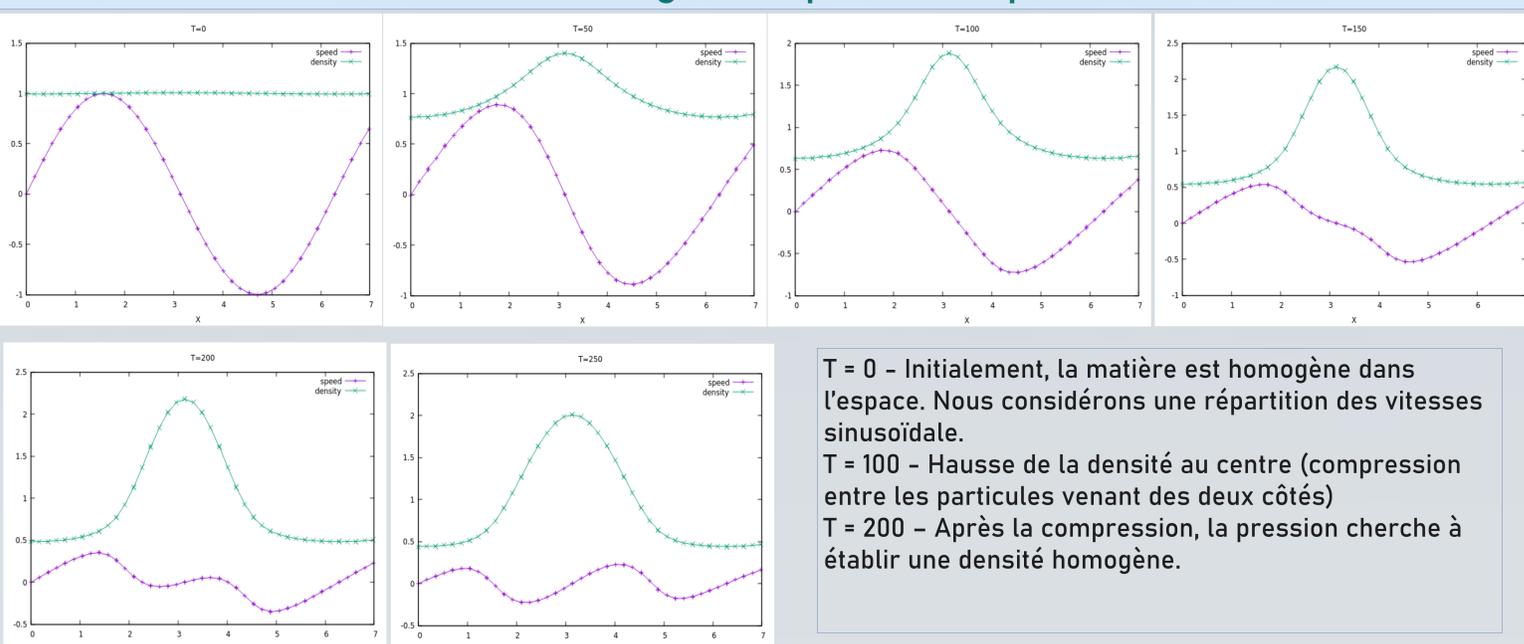
La résolution du problème de Riemann est compliquée. Avec un ordre élevé, une considération sur la valeur moyenne aux frontières est suffisante.

L'utilisation d'un flux central (Lax-Friedrichs) est dès lors pertinente.

$$\text{Lax-Friedrichs Flux} \quad \begin{cases} F(U)_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(f(U)_{j+1}^n + f(U)_j^n) - \frac{\Delta X}{2\Delta t}(U_{j+1}^n - U_j^n) \\ F(U)_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(f(U)_{j-1}^n + f(U)_j^n) - \frac{\Delta X}{2\Delta t}(U_j^n - U_{j-1}^n) \end{cases}$$



## Simulation d'un gaz visqueux compressible



T = 0 - Initialement, la matière est homogène dans l'espace. Nous considérons une répartition des vitesses sinusoïdale.  
T = 100 - Hausse de la densité au centre (compression entre les particules venant des deux côtés)  
T = 200 - Après la compression, la pression cherche à établir une densité homogène.

## Perspectives

### Ordre N

Une réécriture du code permettant un calcul d'ordre aussi élevé que ce que l'on souhaite (ordre optimal ~6, 7) est envisageable. La théorie présentée ici n'étant pas exclusive à l'ordre 3, une généralisation est possible. Une méthode de discrétisation du temps d'ordre 3 minimum est nécessaire pour garantir la stabilité de la simulation.

### 2D

Une représentation en 2D représente un travail plus complexe (Le flux doit être pensé en 2D et les intégrales de contour deviennent des intégrales de surface)