

# Multifractalité dans des chaînes quasi-périodiques de résonateurs micro-ondes couplés

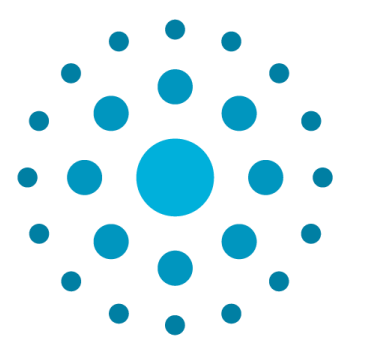


Louise Morlaës

Master Ondes, Atomes, Matière

Encadrants : Fabrice Mortessagne, Ulrich Kuhl et Mattis Reisner

Institut de physique de Nice (INPHYNI)



UNIVERSITÉ  
CÔTE D'AZUR

## Résumé

Pour des structures quasi-périodiques, on peut observer une fractalité dans le spectre des états propres lorsqu'on les réorganise selon une relation d'ordre spatial physiquement plus pertinente des sites de la chaîne. Expérimentalement, nous allons réaliser de telles structures en formant des chaînes de résonateurs diélectriques cylindriques couplés. Cette étude a déjà été réalisée par l'équipe « Ondes en Milieux Complexes » pour des chaînes construites selon la suite de Fibonacci. On étudie le spectre des fréquences de résonance et les états propres qui en découlent pour des structures où nous avons deux différents couplages dont l'agencement dépend d'une suite différente, la suite de Pell. On observe expérimentalement une structure fractale et une construction récursive, que confirment des simulations numériques, pour les états propres de ces chaînes.

## I / Quasi-périodicité et Nombres Métalliques

- Construction des éléments  $F_n$  suit une loi récursive :  

$$F_n = m * F_{n-1} + F_{n-2}$$
 → Forment une suite quasi-périodique (ex : Suite de Fibonacci)
- Nombres irrationnels métalliques :

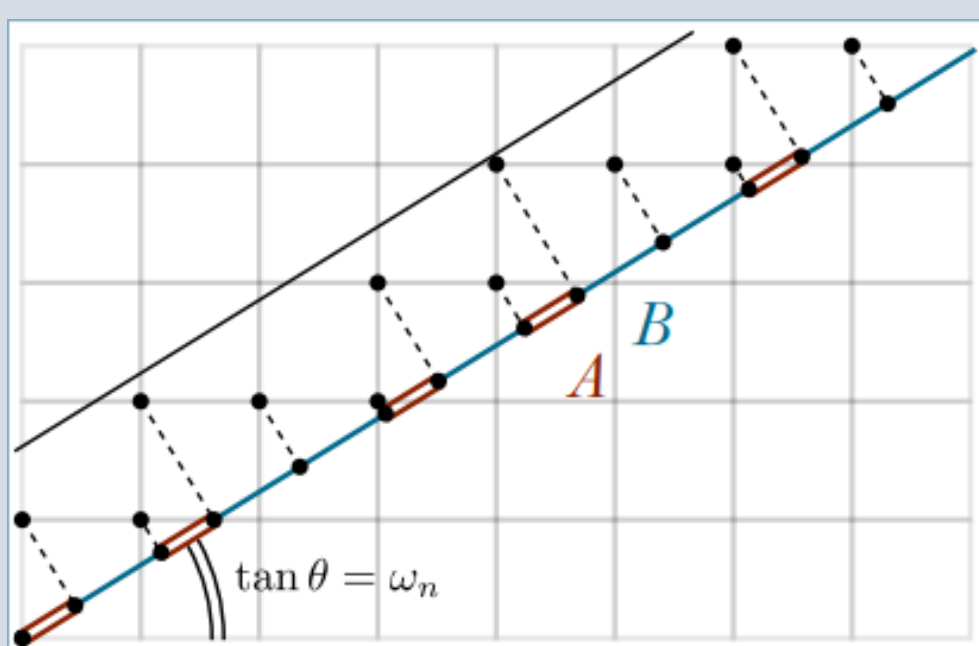
$$\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \dots \text{ Nombre d'or}$$

Nombre d'argent  $\phi_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2,414 \dots$      $\phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3,302 \dots$  Nombre de bronze

- $\omega_n = F_{n+1}/F_n \rightarrow$  approche le nombre irrationnel métallique associé  $\phi_m$ .
- Somme remplacée par une concaténation  
 → Construction des séquences quasi-périodiques  $S_n$  composées de A et de B:

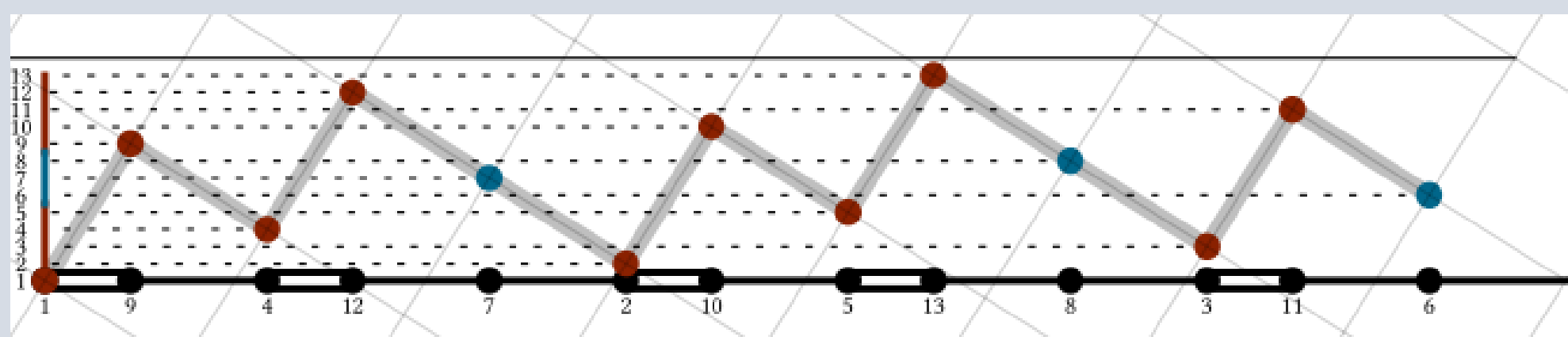
$$S_n = [(S_{n-1})^m S_{n-2}], \text{ Avec } S_0 = B \text{ et } S_1 = A$$

### « Cut & Project »



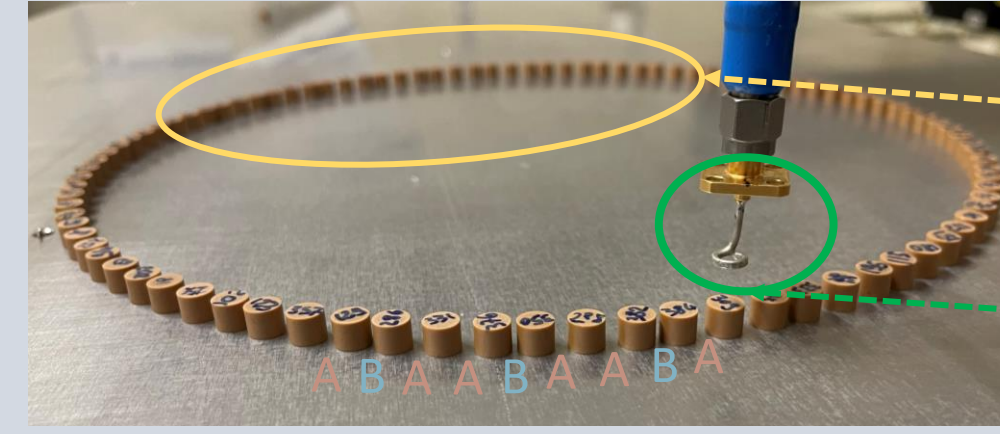
- On coupe un réseau carré avec pente  $\omega_n$
  - Projection orthogonale sur la pente de taille A ou B → Séquence de lettres
- Si  $\omega_n$  rationnel : séquence périodique
  - Si  $\omega_n$  irrationnel : séquence quasi-périodique

Méthode de « Cut & Project » fournissant une séquence quasi-périodique



- Projection des sites sur l'axe perpendiculaire  
 → Index de « comnumber »

## II / Résonateurs micro-ondes et quasi-périodicité

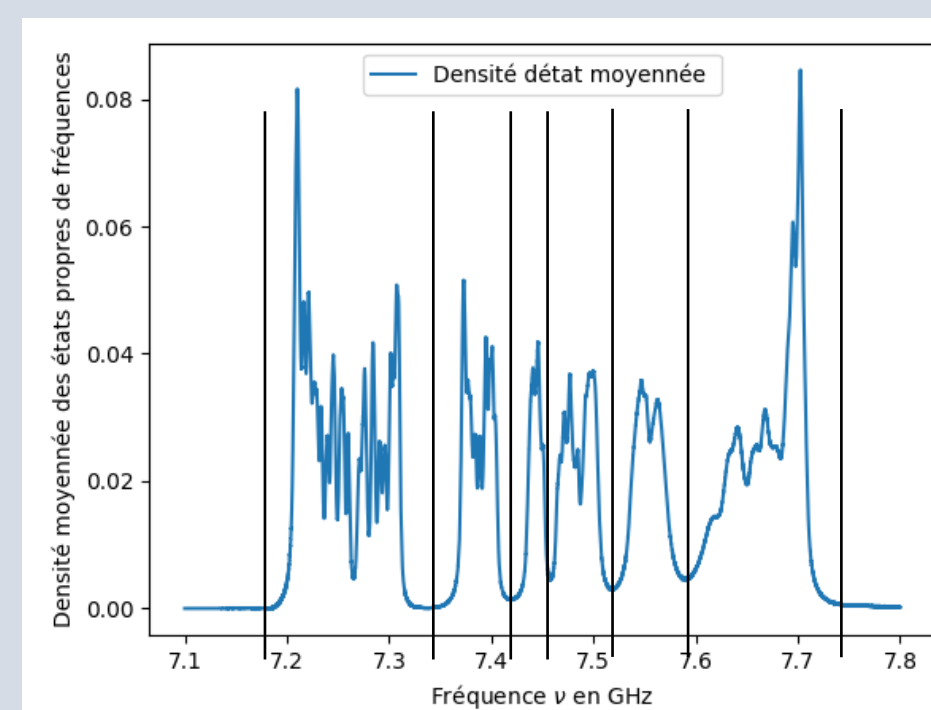


- Résonateurs diélectriques micro-onde (TiZrNbZnO)  
 → Symétrie cylindrique  
 → Fréquence de résonance moyenne :  $\nu_0 = 7.45$  GHz
- Mesure réflexion via antenne «Loop»

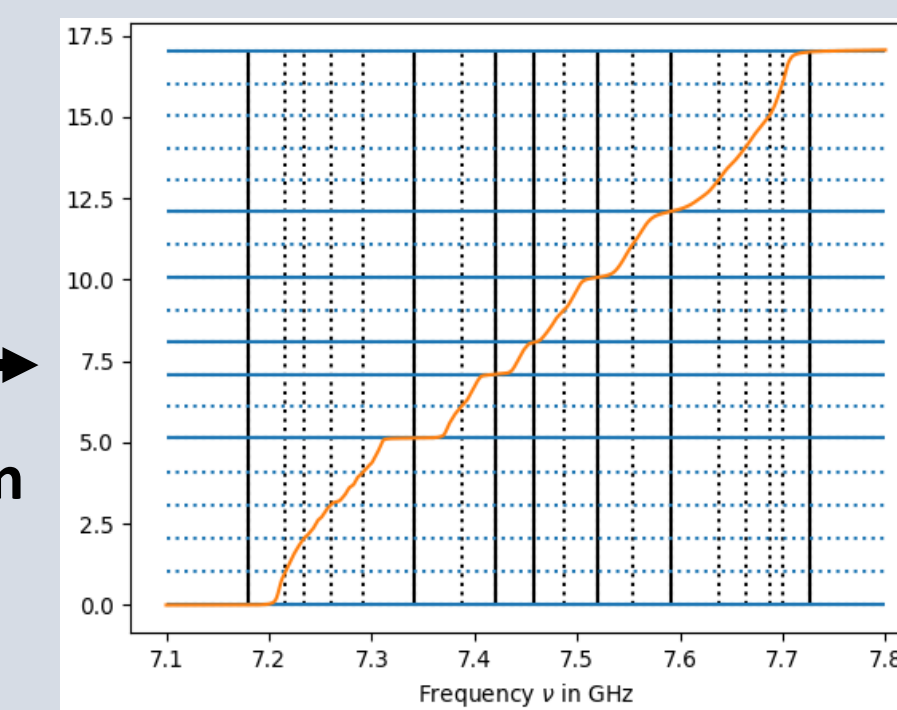
- Couplage évanescent entre les résonateurs voisins  
 → Modèle de liaison forte avec l'hamiltonien  $H$
- 2 Intensités de couplage différentes :  $t_A$  et  $t_B$
- Résonateurs placés à des distances  $d_A$  et  $d_B$
- Si  $d_A > d_B$  Couplage faible dominant  
 Si  $d_A < d_B$  Couplage fort dominant

$$H = \begin{pmatrix} \nu_0 & t_A & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ t_A & \nu_0 & t_B & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & t_B & \nu_0 & t_A & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & t_A & \nu_0 & t_B & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & t_B & \nu_0 & t_A & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_A & \nu_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

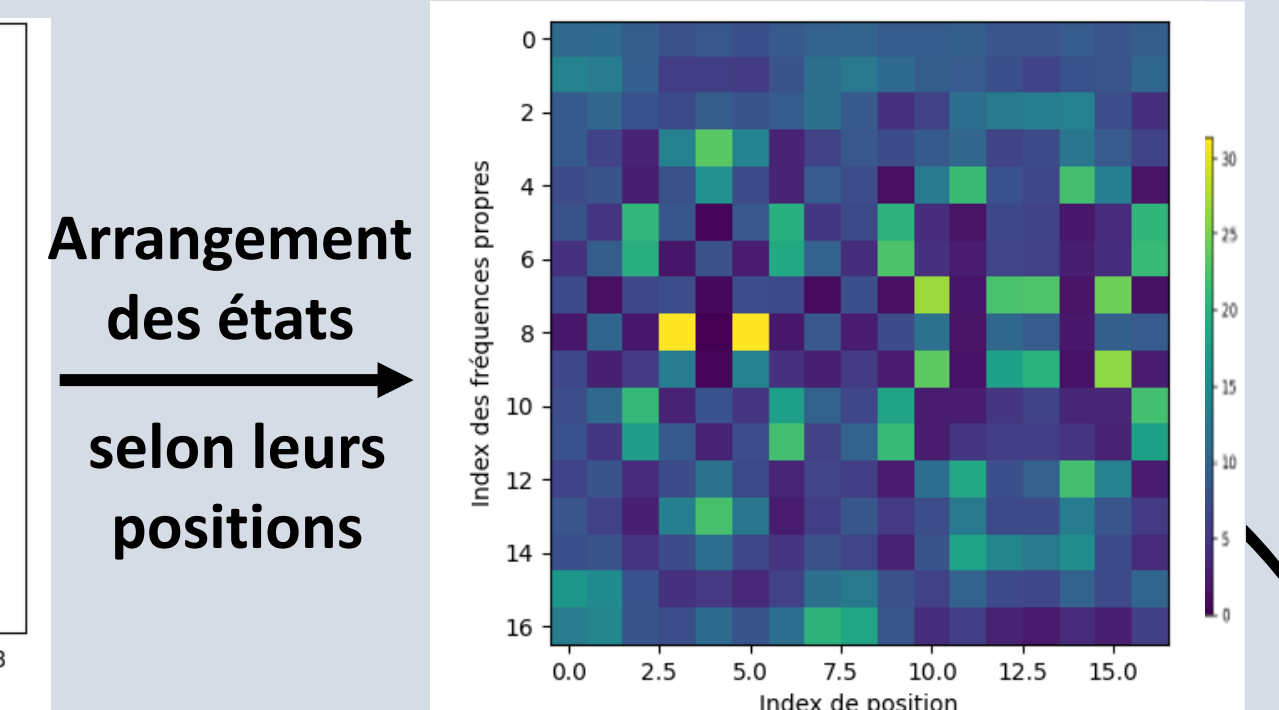
## III / Spectre de réflexion et réorganisation des états propres



Densité d'état moyennée et découpée manuellement en bandes visibles.



Densité d'état intégrée selon les états de fréquences déterminés manuellement (trait pleins) et ceux découps numériques selon le nombre d'états attendus (traits en pointillés) selon la suite de Pell

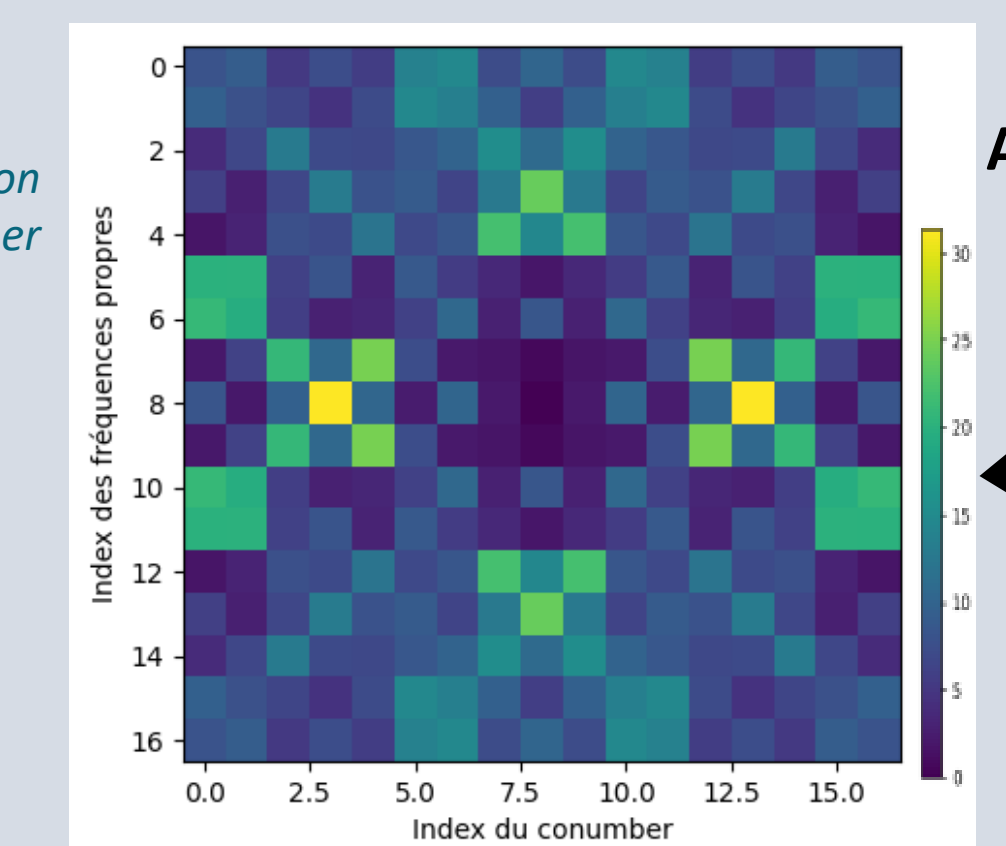


Arrangement des états selon leurs positions

États propres réarranger selon leur index de position

- Étude expérimentale de chaînes de résonateurs construites selon le couplage dominant.
- Traitements des spectres de réflexion obtenus au-dessus de chaque résonateur :  
 → Densité d'état  $1 - |S_{11}|^2$  à partir du spectre de réflexion  $S_{11}$   
 → Intégration de la densité d'état  
 → Arrangement des états selon leur position puis leur comnumber  
 → Symétrisation et normalisation des états selon leur comnumber

États propres réarranger selon leur comnumber

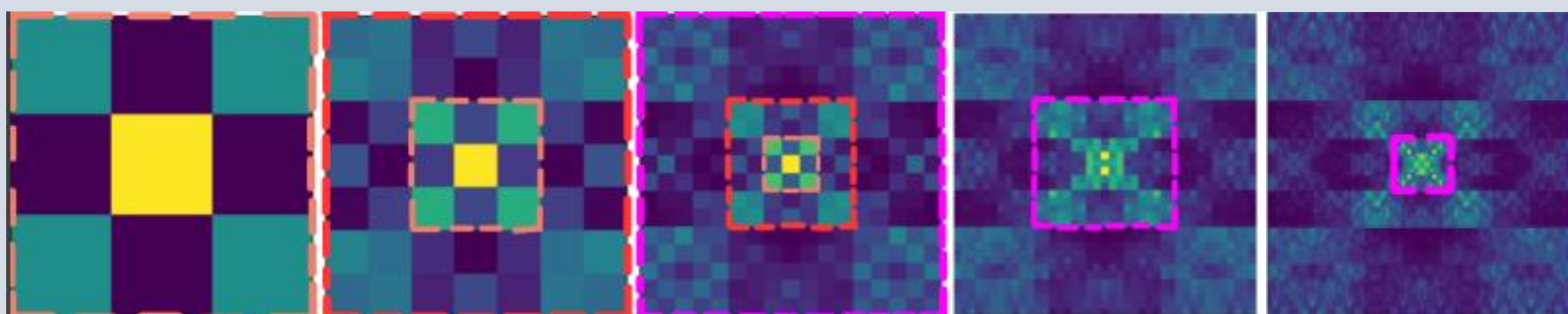


Arrangement des états selon leurs comnumber

## IV / Fractalité pour le nombre d'argent

- Axe vertical : États d'énergie
- Axe horizontal : Réarrangement selon leur comnumber

- Mise en évidence de la fractalité des états d'énergie lorsqu'on les réarrange selon leur projection perpendiculaire sur la droite dont la pente est une approximation du nombre d'argent i.e. réarrangement selon leur comnumber



Couplage faible dominant :  $t_A < t_B$

Couplage fort dominant :  $t_A > t_B$

- États propres réorganisés selon leur comnumber et moyennés pour des chaînes de résonateurs construites pour différents nombres d'itération de la suite de Pell, ce qui nous donne des séquences différentes de taille  $L_n$  :

(De gauche à droite)

$$L_2 = 3, L_3 = 7, L_4 = 17, L_5 = 41 \text{ et } L_6 = 99.$$

## Perspectives

- Analyse théorique des séquences obtenues afin de généraliser les règles de fractalité liées à ces séquences ainsi que les propriétés qui en découlent.



## Références

- [1] U. Kuhl M. Reisner, M. Bellec and F. Mortessagne. *Microwave resonator lattices for topological photonics*. *Optical Materials Express* (2021).
- [2] M. Reisner, Y. Tahmi , F. Piéchon, U. Kuhl and F. Mortessagne. *Experimental Observation of Multifractality in Fibonacci Chains*. (unpublished)(2022).
- [3] E. Levy. *Topological Properties of Quasiperiodic Chains : Structural and Spectral Analysis*. Ph.D. thesis (2016.)

INPHYNI