

# Auto-similarité dans des chaînes quasi-périodiques de résonateurs micro-ondes couplés

## Résumé

Pour des structures quasi-périodiques, nous pouvons observer des auto-similarités entre les spectres des états propres pour différentes séquences quasi-périodiques. Afin d'observer ces structures, les états propres sont réorganisés selon une relation d'ordre spatial physiquement plus pertinente des sites de la chaîne. Nous étudions numériquement de telles structures en simulant des chaînes de résonateurs diélectriques cylindriques couplés. Ces auto-similarités ont déjà été étudiées pour des chaînes construites selon la suite de Fibonacci. Nous étudions le spectre des fréquences de résonance et les états propres qui en découlent pour des structures dont l'agencement dépend d'une suite différente, la suite de Pell. Enfin, nous déterminons empiriquement les règles reliant les séquences de la chaîne de Pell et les séquences appelées « compagnons » permettant d'observer ces auto-similarités pour les états propres.

## I / Construction géométrique de séquences quasi-périodiques

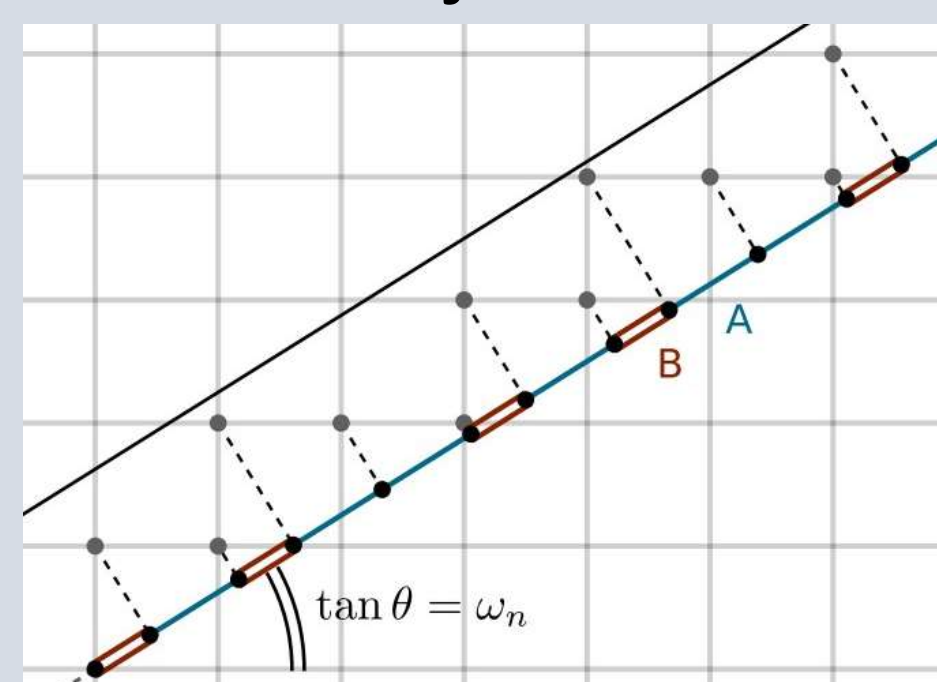
- Construction des éléments  $F_n$  suit une loi récursive :

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

→ Forment la suite de Fibonacci :  $\{F_n\} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots\}$

- $\omega_n = F_{n-2}/F_{n-1}$  → L'inverse approche le nombre d'or

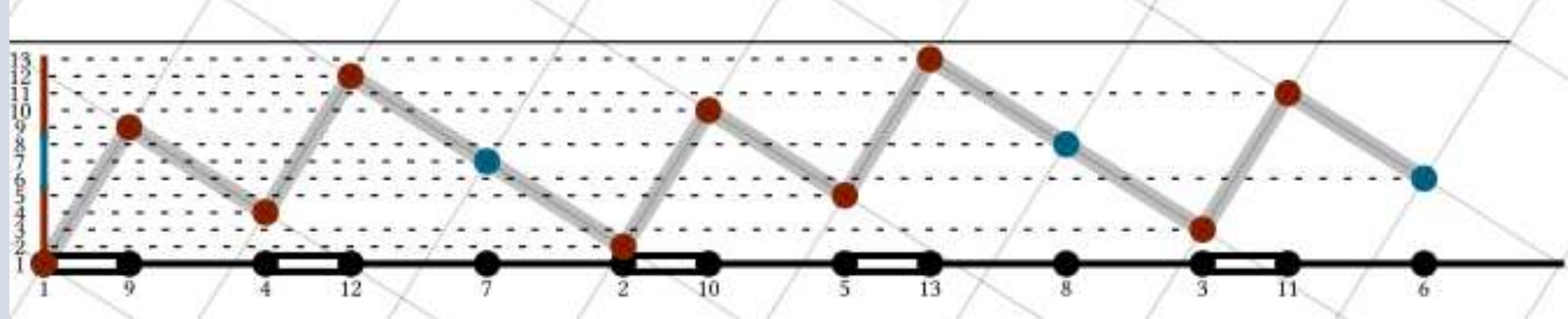
### « Cut & Project »



- On **coupe** un réseau carré avec pente d'angle  $\theta$  tel que :  $\tan(\theta) = \omega_n$
- Projection** orthogonale sur la pente de taille  $A$  ou  $B$  → Séquence de lettres
  - Si  $\omega_n$  rationnel : séquence périodique
  - Si  $\omega_n$  irrationnel : séquence

Méthode de « Cut & Project » fournissant une séquence quasi-périodique

quasi-périodique

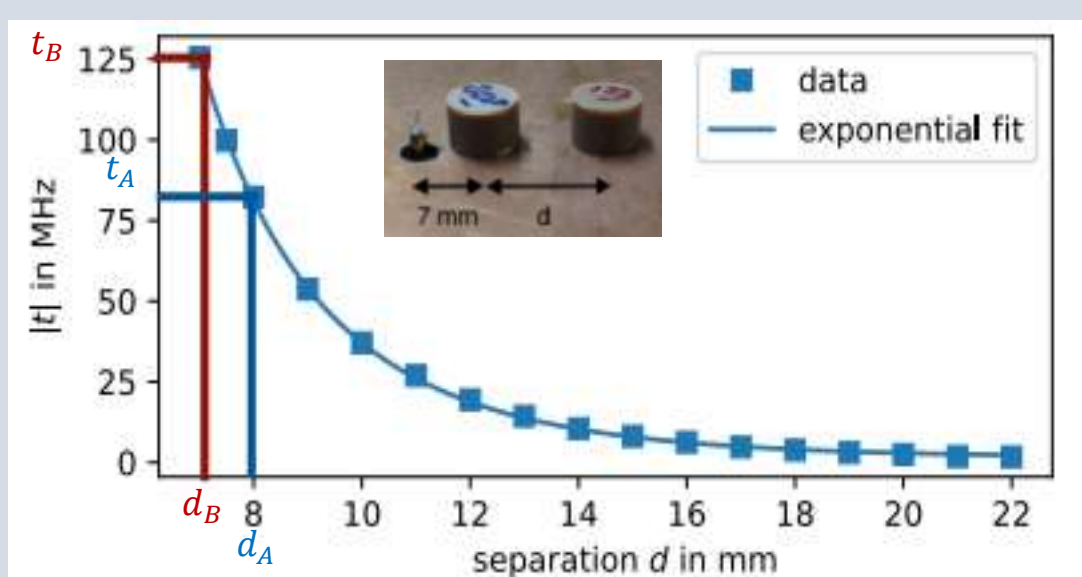


- Projection des sites sur l'axe perpendiculaire → Index de « conumber »

## II / Résonateurs micro-ondes et quasi-périodicité

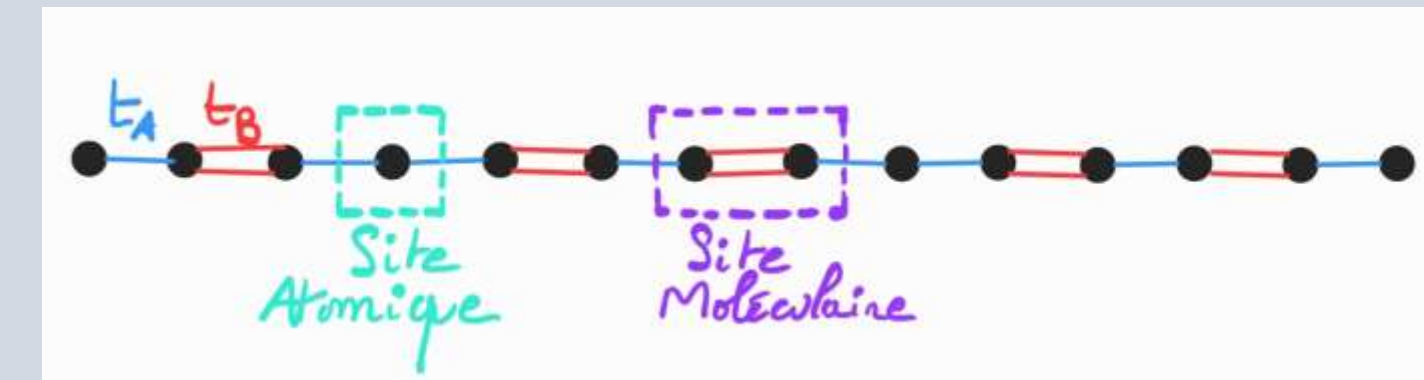
- Résonateurs diélectriques micro-ondes.
- Couplage évanescents entre les résonateurs voisins → Modèle de liaison forte
- 2 Intensités de couplage différentes →  $t_A$  et  $t_B$  → Deux distances  $d_A$  et  $d_B$
- Si  $d_A > d_B$  Couplage faible dominant
- Si  $d_A < d_B$  Couplage fort dominant

Intensité de couplage entre deux résonateurs micro-ondes en fonction de la distance



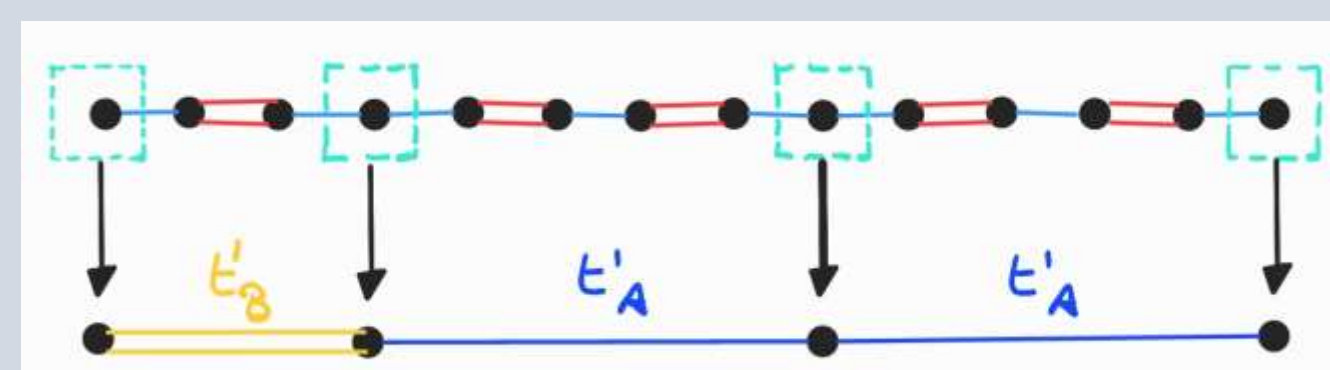
## III / Règles de déflation pour le nombre d'or

- Principe de déflation : → Renormalisation de la séquence en fonction des groupes formés par les résonateurs.



Schématisme des couplages entre les résonateurs pour la séquence de Fibonacci  $S_7$

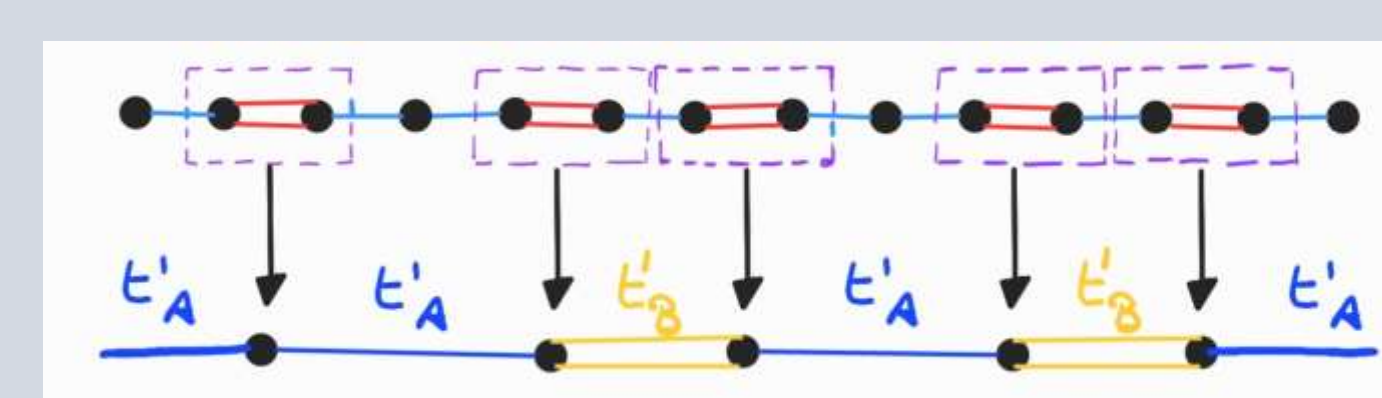
### Déflation atomique



Principe de déflation atomique sur une séquence de Fibonacci

- Règle :  $S_n \rightarrow S_{n-3}$
- $t'_A = \bar{z} * t_A$  et  $t'_B = \bar{z} * t_B$
- Facteur d'échelle :  $\bar{z} = \rho^2 = \left(\frac{t_A}{t_B}\right)^2$

### Déflation Moléculaire



Principe de déflation moléculaire sur une séquence de Fibonacci

- Règle :  $S_n \rightarrow S_{n-2}$
- Facteur d'échelle :  $z = \frac{\rho}{2} = \frac{t_A}{t_B} * \frac{1}{2}$
- $t'_A = z * t_A$  et  $t'_B = z * t_B$

## IV / Généralisation des règles de déflation au nombre d'argent

- Nombres irrationnels métalliques :

$$\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \dots \text{ Nombre d'or}$$

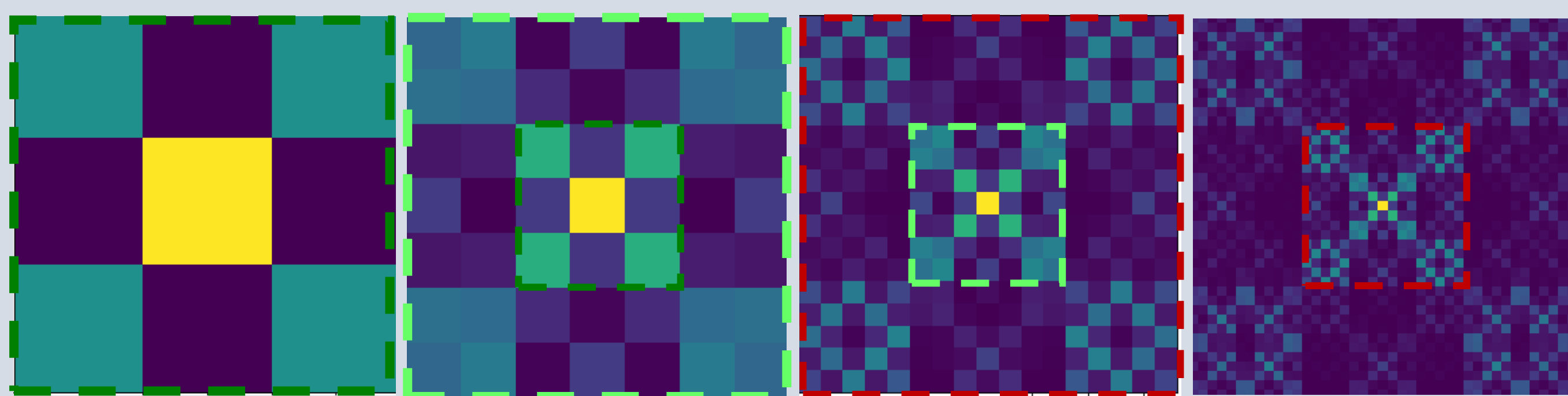
$$\text{Nombre d'argent } \phi_2 = 1 + \sqrt{2} \approx 2,414 \dots \quad \phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \approx 3,302 \dots \text{ Nombre de bronze}$$

- Loi de construction générale des suites quasi-périodiques :  $F_n^{(2)} = m * F_{n-1}^{(2)} + F_{n-2}^{(2)}$  → Il existe d'autres séquences quasi-périodiques  $S_n^{(m)}$  de taille  $L_n^{(m)}$
- Étude des règles de déflation pour les séquences construites à partir de la suite Pell  $F_n^{(2)}$  liée à  $\phi_2$ . → Travail numérique en créant et en améliorant des programmes python.
- Problème : Lors de la déflation moléculaire de séquences  $S_n^{(2)}$ , nous n'observons pas d'auto-similarités avec d'autres séquences de Pell  $S_n^{(2)}$  comme pour Fibonacci. → Piste : Étudier les séquences compagnons  $C_n^{(2)}$  formées à partir de la suite principale  $F^{(2)}$  et de la suite des longueurs des séquences  $L^{(2)}$ .

## V / Observations d'auto-similarités pour le nombre d'argent

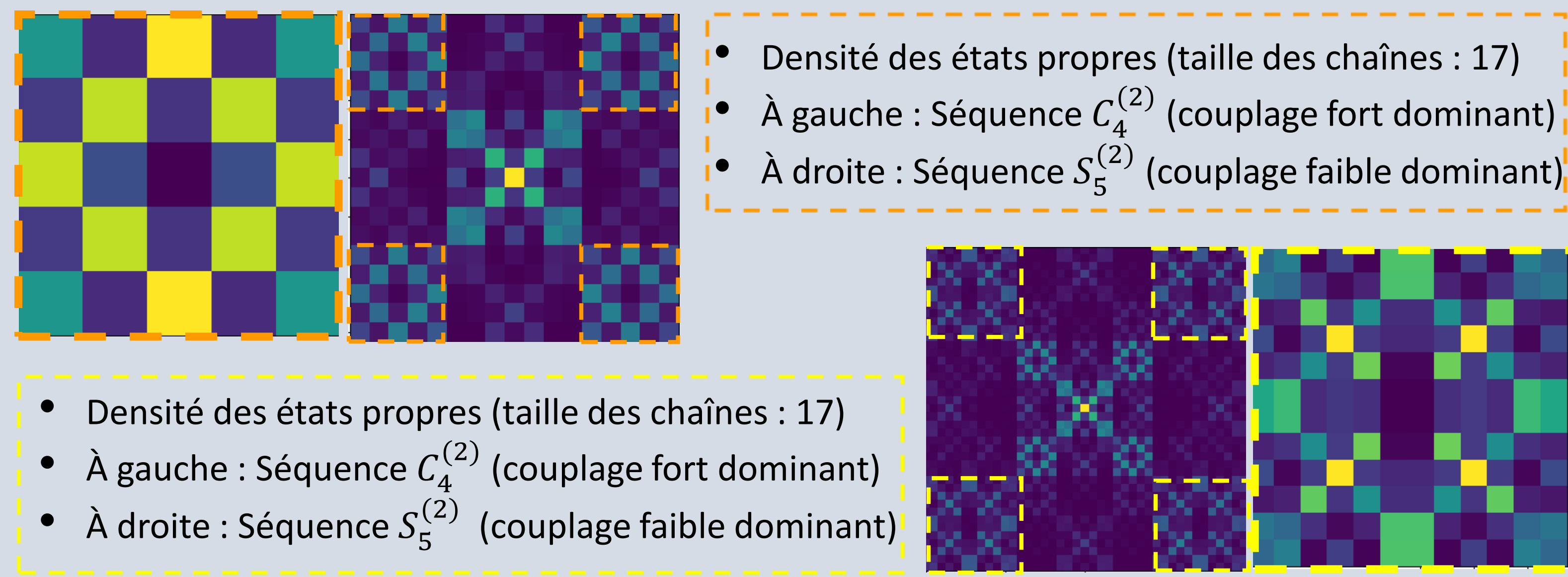
- Axe vertical : Index des fréquences propres
- Axe horizontal : Index de conumber des résonateurs
- Échelle de couleurs : Densité des états propres
- Les différents carrés de couleurs permettent de mettre en évidence les auto-similarités entre différentes séquences quasi-périodiques liées au nombre d'argent.

### Étude des blocs atomiques



- Densité des états propres pour des chaînes de résonateurs construites selon des séquences de Pell, avec couplage faible dominant de différentes, tailles  $L_n^{(2)}$ .
- De gauche à droite :  $S_3^{(2)}$  (taille :  $L_3^{(2)} = 3$ ),  $S_4^{(2)}$  (taille :  $L_4^{(2)} = 7$ ),  $S_5^{(2)}$  (taille :  $L_5^{(2)} = 17$ ),  $S_6^{(2)}$  (taille :  $L_6^{(2)} = 41$ ).

### Étude des blocs moléculaires



- Densité des états propres (taille des chaînes : 17)
- À gauche : Séquence  $C_4^{(2)}$  (couplage fort dominant)
- À droite : Séquence  $S_5^{(2)}$  (couplage faible dominant)

- Densité des états propres (taille des chaînes : 17)
- À gauche : Séquence  $C_4^{(2)}$  (couplage fort dominant)
- À droite : Séquence  $S_5^{(2)}$  (couplage faible dominant)

## Perspectives

- Comprendre la théorie derrière les règles de déflation déterminées empiriquement.
- Généralisation à d'autres séquences quasi-périodiques.

## Références

- [1] Nicolas Macé, Anuradha Jagannathan, and Frédéric Piéchon. *Fractal dimensions of wave functions and local spectral measures on the Fibonacci chain*. *Physical Review B* (2016).
- [2] M. Reisner. Etudes expérimentales de la multifractalité et des transitions de phase topologiques dans des réseaux de résonateurs micro-ondes. Ph.D. thesis (2023.)
- [3] U. Kuhl M. Reisner, M. Bellec and F. Mortessagne. *Microwave resonator lattices for topological photonics*. *Optical Materials Express* (2021).